

Tema: Analisi Matematica. Integrazione indefinita

Applicazione del metodo di integrazione per sostituzione

Premessa teorica

Ricordiamo che un integrale indefinito la cui funzione integranda sia piuttosto complessa a volte può essere calcolato ricorrendo alla sostituzione di variabile per ridurre la forma analitica della funzione integranda ad una più accessibile. Sia

$\int f(x) dx$, con $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'integrale da calcolare.

Se esiste una funzione $\varphi: B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow A$ che sia biunivoca e derivabile, posto $x = \varphi(t)$, sussiste la seguente uguaglianza:

$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$, nella quale il fattore dx è stato sostituito dal differenziale primo della funzione $\varphi(t)$.

Se con la sostituzione effettuata si riesce a calcolare l'integrale,

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(t) + c,$$

si può utilizzare l'espressione della funzione inversa $t = \varphi^{-1}(x)$, che esiste perché φ è biunivoca per ipotesi, per ritornare alla variabile indipendente originaria x . In definitiva sussistono le seguenti uguaglianze:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(t) + c = F(\varphi^{-1}(x)) + c$$

*** **

Calcolare gli integrali indefiniti che seguono utilizzando il metodo di integrazione per sostituzione.

1. $\int x \cdot e^{3x-1} dx$

R: $\frac{1}{9}(3x-1) \cdot e^{3x-1} + c$

2. $\int x \cdot \sqrt{x+1} dx$

R: $\frac{2}{15}(3x^2 + x - 2) \cdot \sqrt{x+1} + c$

3. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{1-x}} dx$

R: $\frac{2(5-2x)}{3} \cdot \sqrt{1-x} + c$

4. $\int x(4x+3)^5 dx$

R: $\frac{(4x+3)^7}{112} - \frac{(4x+3)^6}{32} + c$

5. $\int \frac{dx}{1+(5x+7)^2}$

R: $\frac{1}{5} \arctg(5x+7) + c$

6. $\int \frac{dx}{2+(2x-1)^2}$

R: $\frac{\sqrt{2}}{4} \arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + c$

7. $\int \frac{dx}{25x^2+10x+4}$

R: $\frac{\sqrt{3}}{15} \arctg\left(\frac{5x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$

Elaborazioni

1. Per il calcolo di questo integrale utilizziamo la sostituzione $3x-1=t$, da cui si ricava $x = \frac{t+1}{3} = \varphi(t)$ e

quindi risulta $dx = \frac{1}{3} dt$. Eseguiamo il calcolo dell'integrale indefinito:

$$\int x \cdot e^{3x-1} dx = \int \frac{t+1}{3} \cdot e^t \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{9} \int (te^t + e^t) dt = \frac{1}{9} \int te^t dt + \frac{1}{9} \int e^t dt;$$

il primo integrale si calcola applicando il metodo di integrazione per parti (assumendo la funzione esponenziale come fattore differenziale) ed il secondo integrale è immediato. Si ha:

$$\frac{1}{9} \int te^t dt = \frac{1}{9} (te^t - \int 1 \cdot e^t dt) = \frac{1}{9} (te^t - e^t);$$

$$\frac{1}{9} \int e^t dt = \frac{1}{9} e^t;$$

$$\text{quindi } \frac{1}{9} \int te^t dt + \frac{1}{9} \int e^t dt = \frac{1}{9} (te^t - e^t) + \frac{1}{9} e^t + c = \frac{1}{9} te^t + c,$$

e tornando alla variabile x si conclude

$$\int x \cdot e^{3x-1} dx = \frac{1}{9} (3x-1) e^{3x-1} + c$$

2. $\int x \cdot \sqrt{x+1} dx$

Nota teorica - Gli integrali indefiniti del tipo $\int P(x) \cdot \sqrt{ax+b} dx$, con $P(x)$ polinomio di qualsiasi grado nella variabile x , si risolvono con la sostituzione $\sqrt{ax+b} = t$, dove ovviamente risulterà $t \geq 0$. Si ricava x in funzione della nuova variabile e la si sostituisce nella funzione integranda; l'espressione ottenuta sarà un polinomio nella variabile t che si potrà integrare agevolmente e a conclusione si sostituirà t con $\sqrt{ax+b}$ per ricondursi alla variabile originaria x .

Per l'integrale in esame poniamo $\sqrt{x+1} = t$, da cui $x = t^2 - 1 \rightarrow dx = 2t dt$; l'integrale indefinito assume la seguente forma

$$\int (t^2 - 1) \cdot t \cdot 2t dt = 2 \int (t^4 - t^2) dt = 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) + c = \frac{2}{5} \cdot (\sqrt{x+1})^5 - \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{x+1})^3 + c =$$

$$\frac{2}{5} \cdot (x+1)^2 \sqrt{x+1} - \frac{2}{3} \cdot (x+1) \sqrt{x+1} + c = \left[\frac{6}{15} \cdot (x+1)^2 - \frac{10}{15} \cdot (x+1) \right] \cdot \sqrt{x+1} + c =$$

$$\frac{1}{15} (6x^2 + 2x - 4) \cdot \sqrt{x+1} + c = \frac{2}{15} (3x^2 + x - 2) \cdot \sqrt{x+1} + c$$

3. $I = \int \frac{2x-3}{\sqrt{1-x}} dx$ Poniamo $\sqrt{1-x} = t$, da cui $1-x = t^2 \rightarrow x = 1-t^2 \rightarrow dx = -2t dt$, quindi si ha

$$\int \frac{2x-3}{\sqrt{1-x}} dx = \int \frac{2(1-t^2)-3}{t} \cdot (-2t) dt = -2 \int (-2t^2 - 1) dt = 2 \left(2 \cdot \frac{t^3}{3} + t \right) + c = \frac{4}{3} t^3 + 2t + c =$$

$$\frac{4}{3} (\sqrt{1-x})^3 + 2\sqrt{1-x} + c = \frac{4}{3} (1-x) \sqrt{1-x} + 2\sqrt{1-x} + c = \dots = \frac{2(5-2x)}{3} \cdot \sqrt{1-x} + c$$

4. $\int x(4x+3)^5 dx$, con $4x+3=t$ si ha $x = \frac{t-3}{4} \rightarrow dx = \frac{1}{4} dt$, quindi

$$\int x(4x+3)^5 dx = \int \frac{t-3}{4} \cdot t^5 \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{16} \int (t^6 - 3t^5) dt = \frac{1}{16} \left(\frac{t^7}{7} - 3 \cdot \frac{t^6}{6} \right) + c = \frac{1}{112} (4x+3)^7 - \frac{1}{32} (4x+3)^6 + c$$

5. $\int \frac{dx}{1+(5x+7)^2}$, con $5x+7=t \rightarrow x=\frac{t-7}{5} \rightarrow dx=\frac{1}{5}dt$ per cui si ha

$$\int \frac{dx}{1+(5x+7)^2} = \int \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{1}{5} dt = \frac{1}{5} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{5} \cdot \arctg(t) + c = \frac{1}{5} \cdot \arctg(5x+7) + c$$

Osservazione - L'integrale sviluppato in questo punto e i due successivi si possono calcolare anche velocemente riconducendoli all'**integrale immediato** che segue:

$$\int \frac{\varphi'(x)dx}{1+[\varphi(x)]^2} = \int \frac{d\varphi(x)}{1+[\varphi(x)]^2} = \arctg(\varphi(x)) + c.$$

Infatti, possiamo scrivere

$$\int \frac{dx}{1+(5x+7)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{5 \cdot dx}{1+(5x+7)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{d(5x+7)}{1+(5x+7)^2} = \frac{1}{5} \cdot \arctg(5x+7) + c$$

6. $\int \frac{dx}{2+(2x-1)^2}$

Per il calcolo di questo integrale, simile nella struttura all'integrale sviluppato nel precedente punto, non conviene effettuare subito la sostituzione di variabile ponendo $2x-1=t$ ma trasformare la funzione integranda intervenendo sul denominatore come di seguito indicato:

$$\int \frac{dx}{2+(2x-1)^2} = \int \frac{dx}{2 \left[1 + \frac{(2x-1)^2}{2} \right]} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}} \right)^2}$$

A questo punto si effettua la sostituzione di variabile ponendo

$\frac{2x-1}{\sqrt{2}} = t$, da cui si ottiene $x = \frac{\sqrt{2} \cdot t + 1}{2}$, quindi anche $dx = \frac{\sqrt{2}}{2} dt$. Procediamo con il calcolo dell'integrale.

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}} \right)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} dt = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \arctg(t) + c = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + c$$

7. $\int \frac{dx}{25x^2+10x+4}$

Per il calcolo di questo integrale notiamo che il discriminante del trinomio di secondo grado è negativo $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 25 \cdot 4 = -300$ e che possiamo scrivere il trinomio come somma di due quadrati nella seguente forma $25x^2+10x+4 = 3 + (5x+1)^2$. Ciò premesso eseguiamo i calcoli:

$$\int \frac{dx}{25x^2+10x+4} = \int \frac{dx}{3+(5x+1)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{5x+1}{\sqrt{3}} \right)^2}$$

Poniamo ora $\frac{5x+1}{\sqrt{3}} = t$, da cui $x = \frac{\sqrt{3}t-1}{5}$ e $dx = \frac{\sqrt{3}}{5} dt$. La forma dell'integrale diventa

$$\frac{1}{3} \int \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{5} dt = \frac{\sqrt{3}}{15} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\sqrt{3}}{15} \arctg(t) + c = \frac{\sqrt{3}}{15} \arctg\left(\frac{5x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$